Hausdorff空间:

- X为一个拓扑空间. 若X中$\forall$两个不相同的点各自有一个开邻域 使得两个开邻域互不相交 则称X为一个Hausdorff空间 (T_2)
- Hausdorff空间中的$\forall$一个收敛序列只有一个极限点.
- n维流形 (n维拓扑流形)

  M为一个Hausdorff拓扑空间. 若M的每一点p有一开邻域$U\subset M$ s.t. U和R^n中的一个开子集同胚 称M为n维流形

- 坐标卡: $\varphi: U\to\varphi(U)\subset R^n$ $\varphi(U)$为R^n中开集. (U,φ)为M的一个坐标卡
- 微分结构:

  M是n维拓扑流形. 假定$A=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in I\}$是$M$的坐标卡的一个集合满足:

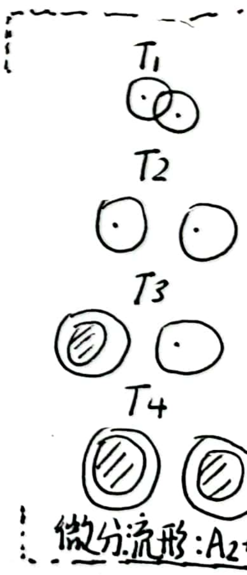
  (1) $\{U_\alpha:\alpha\in I\}$构成流形M的一个开覆盖

  (2) 属于A的任意两个坐标卡都是C^r相关的 (相容性) 即若$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ $(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathcal{D}$ $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ 则$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$是$C^r$类

  (3) A是C^r极大的 (最大性)

  则称坐标卡集A为流形M上的一个C^r微分结构 (M,A)称为n维C^r微分流形 ($r=\infty$: 光滑流形)

- 局部坐标系: 对于$p\in M$ 若$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in D$, $p\in U_\alpha$ 则称$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$为$p$点一个局部坐标系.



重要例子:

① $M=S^1$

$U_1=S^1-\{e^{i\cdot 0}\}$ $\varphi_1: U_1\to(0,2\pi)\subset R^1$ $e^{i\theta}\to\varphi_1(e^{i\theta})=\theta$ $(0<\theta<2\pi)$

$U_2=S^1-\{e^{i\cdot\pi}\}$ $\varphi_2: U_2\to(\pi,3\pi)\subset R^1$ $e^{i\eta}\to\varphi_2(e^{i\eta})=\eta$ $(\pi<\eta<3\pi)$

球面 推广

$\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$确定一个1维$C^\infty$流形$(S^1,D)$ (徐. P102)

② $S^n=\{x: x\in R^{n+1}$ 且$|x|=1\}$

R^{n+1}为Hausdorff空间 $\Rightarrow S^n$为R^{n+1}拓扑子空间为Hausdorff

$1\le\alpha\le n+1$ $U_\alpha^+=\{(x^1\cdots x^{n+1})\in S^n: x^\alpha>0\}$

$U_\alpha^-=\{(x^1\cdots x^{n+1})\in S^n: x^\alpha<0\}$

$\varphi_\alpha^+: U_\alpha^+\to R^n$, $\varphi_\alpha^+(x^1\cdots x^{n+1})=(x^1,\cdots,\hat{x}^\alpha,\cdots x^{n+1})$ ($\hat{x}^\alpha$表示去掉分量x^α)

$\varphi_\alpha^-: U_\alpha^-\to R^n$, $\varphi_\alpha^-(x^1\cdots x^{n+1})=(x^1,\cdots\hat{x}^\alpha,\cdots x^{n+1})$ (. . . . .)

$\{(U_\alpha^+,\varphi_\alpha^+),(U_\alpha^-,\varphi_\alpha^-): 1\le\alpha\le n+1\}$ 使S^n成为一个n维光滑流形 (P49)

射影空间 推广

③ $M=P^2$ $\mathcal{D}'=\{(U_1^+,\varphi_1^+)\ (U_2^+,\varphi_2^+)\ (U_3^+,\varphi_3^+)\}$确定一个2维$C^\infty$流形$(P^2,D)$ (徐. P106)

④ 实射影空间RP^n: $\pi: R^{n+1}\setminus\{0\}\to RP^n$ 典型投影 $\pi(v)=[v]$ 为v所在一等价类

$U_\alpha=\{[(x^1\cdots x^{n+1})]: (x^1,\cdots,x^{n+1})\in R^{n+1}, x^\alpha\neq 0\}$

$\varphi_\alpha([(x^1,\cdots x^{n+1})])=\left(\frac{x^1}{x^\alpha},\cdots,\frac{x^{\alpha-1}}{x^\alpha},\frac{x^{\alpha+1}}{x^\alpha},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^\alpha}\right)$

$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha): 1\le\alpha\le n+1\}$ 决定了RP^n上光滑结构

(P50)

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

⑤ 积流形:

$\{(U_\alpha\times V_i,\ \varphi_\alpha\times\psi_i):\alpha\in I_1,\ i\in I_2\}$ 在M×N上决定了一个m+n维光滑结构 (徐 P109 例9)

推广 $\downarrow$

⑥ 作业题 (徐 P109 3)

推广 $\downarrow$

⑦ n维环面 $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n个}$ 是n维C^∞流形

⑧ 开子流形

$\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in I\}$ $V\subset M$为开子集 $V_\alpha=U_\alpha\cap V$ $\psi_\alpha=\varphi_\alpha|V_\alpha$

$\{(V_\alpha,\psi_\alpha):\alpha\in I\}$ 为M的一个开子流形

· C^k映射:

(M_1,D_1) (M_2,D_2) 分别为m维 n维的C^r流形 $F:M_1\to M_2$ 对$\forall p\in M_1$, $q=F(p)$的$\forall$局部坐标系$(V_\beta,\psi_\beta)\in D_2$ 必有p的局部坐标系$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in D_1$ 使$F(U_\alpha)\subset V_\beta$, 且$\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\psi_\beta(V_\beta)$为$C^k$ $(k\le r)$时 则称F为M_1到M_2的C^k映射

· 定理: 基 $\longrightarrow$ 空间 (P113)

· C^k函数: (M,D)为m维C^r流形 $U\subset M$为开集 若映射 $f:U\to R^1$ 对$\forall(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in D'$(D的基), $U\cap U_\alpha\ne\varnothing$ 有 $f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U\cap U_\alpha)\to R^1$ 为C^k的 则f是U上的C^k函数 ($C^k(U)$为C^k函数全体)

· 秩和Jacobi矩阵: $D(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}=\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi_\alpha(p)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}$

$\mathrm{rank}\,(D\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}$ — 秩

· 浸入 嵌入 微分同胚:

C^k映射 $F:M_1\to M_2$ 对$\forall p\in M_1$ 有$(\mathrm{rank}F)_p=m$ $(m\le n)$: F为C^k浸入

$F:M_1\to F(M_1)\subset M_2$ 同胚 且F浸入: F为C^k嵌入

$F:M_1\to M_2$是同胚 且为C^k浸入: F为微分同胚 $(m=n)$

浸入 $\xrightarrow[\text{同胚}]{+M_1\to F(M_1)}$ 嵌入

+m=n $\downarrow$ 同胚

微分同胚

(徐 定理4) 若F为C^r映射 且$(\mathrm{rank}F)_p=m=n$ 则可有p的邻域U和q邻域V s.t.

(1°) $F:U\to V$为同胚映射

(2°) $F^{-1}:V\to U$为C^r映射

·子流形:

(W, D_2)为n维C^r流形　$M\subset W$　D_1: m维C^r流形构造满足

① 包含 $I: M\to W$　$I(p)=p\ (p\in W)$为C^r的　② $(\mathrm{rank}\, I)_p=m\ (p\in M)$　(即I为一一的C^r浸入)

称(M, D_1)为(W, D_2)的C^r子流形

·C^r正则子流形

+I为C^r嵌入

→ M为W的C^r正则子流形

例子:　S^2为R^3的C^∞正则子流形　+ 环面

$I_{R^3}\circ I\circ(\varphi_3^+)^{-1}(x, y)=(x, y, z)$　秩为2

定理: (P129) 设M_1 M_2为m维 n维C^r流形　$F: M_1\to M_2$为C^r映射 若$(\mathrm{rank} F)_p=l$　则对于$\forall q\in M_2$

$F^{-1}(q)=\{p\in M_1 \mid F(p)=q\}$或为$\phi$ 或为M_1的$m-l$维正则子流形

切向量 切空间:

·Kronecker符号　$\delta_i^j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

芽:　$(M, \mathcal{D})$: n维C^∞流形

$F_p=\{(f, G_1) \mid p\in G_1\subset M, G_1$为M的开集 $f: G_1\to R$为C^∞的$\}$. 若∃含p的开集$G\subset G_{l_1}\cap G_{l_2}$ s.t. $f_1|_G\equiv f_2|_G$

则$(f_1, G_{l_1})\sim(f_2, G_{l_2})$

记等价类$\{f\}=\{(f_1, G_{l_1}) \mid (f_1, G_{l_1})\sim(f, G_1)\}$ 称为C^∞函数f在p点的芽　$F_p/\sim$: p点处芽全体

↓

形成代数

切向量:　$X_p: F_p/\sim\ \to R$　$\{f\}\to X_p\{f\}$ 满足条件

① 线性性　$X_p(\{f\}+\{g\})=X_p\{f\}+X_p\{g\}$

② $X_p(c\cdot\{f\})=c\cdot X_p\{f\}$

③ Leibniz法则(导性)　$X_p(\{f\}\cdot\{g\})=\{g\}_p\cdot X_p\{f\}+\{f\}_p\cdot X_p\{g\}=g(p)\cdot X_p\{f\}+f(p)\cdot X_p\{g\}$

例:　$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon)\to M$为光滑流形M中经过一点$x_0$的一条光滑曲线　$\gamma(0)=x_0$ 则曲线γ确定了一个切向量 $v: C^\infty_{x_0}\to R$　$v(f)=\left.\dfrac{d(f\cdot\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}$　$\forall f\in C^\infty_{x_0}$

(验导性)　P58)

切空间: $T_p(M)=\{X_p \mid X_p$ 为 p 点处切向量$\}$ 中有自然线性结构 $\begin{cases}(X_1+X_2)\{f\}=X_1\{f\}+X_2\{f\} \\ (cX)\{f\}=c\cdot X\{f\}\end{cases}$

$\rightarrow T_p(M)$ 形成向量空间 — 切空间

① $T_p(M)$ 为 n 维向量空间

② 坐标基变换 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\ \{x^i\}$ $\quad (U_\beta,\varphi_\beta)\ \{y^i\}$

$U_\alpha\cap U_\beta$ 中有: $\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix}$

③ 切向量坐标变换

$$\begin{pmatrix}\beta^1\\ \beta^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \vdots \\ \alpha^n\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 切向量的四种定义 1' 2' 2'' 2'''

* 切空间 $T_{x_0}M$ 的对偶空间称为光滑流形 M 在点 x_0 的余切空间, 记作 $T^*_{x_0}M$ 余切空间 $T^*_{x_0}M$ 的元素称为光滑流形在点 x_0 处的余切向量:

例子: 光滑函数 f 在点 $x_0\in M$ 处微分 $df|_{x_0}$ 就是 f 在 x_0 的普通微分

C^∞ 映射的微分 F_*

定义: (M_1,D_1) m 维 C^∞ $\quad (M_2\ D_2)$ n 维 C^∞ $\quad F: M_1\rightarrow M_2$ 为 C^∞ 映射 $\quad F$ 在 p 点微分 $\quad F_*: T_p(M_1)\rightarrow T_{F(p)}(M_2)$

s.t. 对 $F(p)$ 附近 $\forall C^\infty$ 实函数 f, 有 $F_*(X_p)f=X_p(f\circ F)$ $\quad (X_p\in T_p(M_1))$

$$\begin{pmatrix}F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\\ \vdots \\ F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^m} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n}\end{pmatrix}$$

C^∞ 向量场和积分曲线

- (M,D) n 维 C^∞ 流形 $\quad A\subset M$ $\quad X$ 向量场 对 $\forall p\in A$ 有 $X_p\in T_p(M)$ 且 X_p 唯一
  $X=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ $\quad \alpha^i$ 为 U 上的 C^r 函数 $\quad (U\subset A)$: X 为 C^r 向量场
- (M,D) 为 n 维 C^∞ 流形 则 M 上向量场 X 为 C^∞ 的 $\Leftrightarrow$ 对 M 上 $\forall C^\infty$ 函数 f, Xf ($(Xf)_p=X_pf$) 为 M 上 C^∞ 函
- (M,D) 为 n 维 ——, $W\subset R^1$ 为开集 $\quad C^r$ 映射 $\sigma: W\rightarrow M$ 为 M 中一条 C^r 曲线

$T_\delta(t)=\delta_*\left(\frac{d}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ\delta)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\delta(t)}$

$T_\delta(t)\cdot f=(\quad)f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\cdot\frac{d(x^i\circ\delta)}{dt}=\frac{df(\delta(t))}{dt}$

· X为n维C^∞流形$(M,\mathcal{D})$的某个开集上的C^∞向量场，若C^∞曲线δ的象在X定义域中且$T_\delta(t)=X_{\delta(t)}$

则称δ为X的积分曲线或流线

*黎曼曲面：

R^3中单位球面S^2 取$P=(0,0,1)$为北极 $Q=(0,0,-1)$为南极 $U_+=S^2\setminus\{P\}$ $U_-=S^2\setminus\{Q\}$

球极投影 $\varphi_+:U_+\to R^2$ $\varphi_-:U_-\to R^2$

$\varphi_+(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)=(\xi,\eta)$

$\varphi_-(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{-y}{1+z}\right)=(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$

将R^2视为复平面C 令$\zeta:\xi+i\eta$，$\tilde{\zeta}=\tilde{\xi}+i\tilde{\eta}$

则通过映射 $U_+\xrightarrow{\varphi_+}R^2\xrightarrow{\zeta}C$ $U_-\xrightarrow{\varphi_-}R^2\xrightarrow{\tilde{\zeta}}C$ 建立一一对应

交集$U_+\cap U_-$中每点两个复坐标ζ $\tilde{\zeta}$ 变换为 $\zeta=\frac{1}{\tilde{\zeta}}$ $\tilde{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$

U_+中南极对应$\zeta=0$ U_-中北极对应于$\tilde{\zeta}=0$

$\bar{C}$为$C+\{\infty\}$ $\Rightarrow\bar{C}$与S^2建立一一对应